

## अध्याय 5

# त्रिकोणमिति

## महत्त्वपूर्ण बिन्दु

- त्रिकोणमितीय अनुपात :  $\triangle ABC$ , में  $\angle B = 90^\circ$  कोण 'A' के लिए—

$$\sin A = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}$$

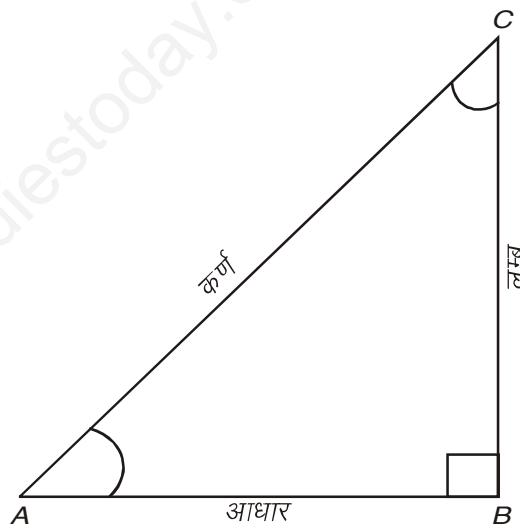
$$\cos A = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}}$$

$$\tan A = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$$

$$\cot A = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}}$$

$$\sec A = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}}$$

$$\cosec A = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}}$$



- व्युत्क्रम

$$\sin \theta = \frac{1}{\cosec \theta} , \quad \cosec \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sec \theta} , \quad \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta},$$

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

### 3. आनुपातिक संबंध

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta},$$

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

### 4. सर्वसमिकाएँ

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta \text{ और } \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$$

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta \Rightarrow \tan^2 \theta = \sec^2 \theta - 1 \text{ और } \sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1$$

$$1 + \cot^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta \Rightarrow \cot^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta - 1 \text{ और } \operatorname{cosec}^2 \theta - \cot^2 \theta = 1$$

### 5. कुछ विशिष्ट कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात

$\angle A$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
$\sin A$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos A$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan A$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	अपरिभाषित
$\operatorname{cosec} A$	अपरिभाषित	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
$\sec A$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	अपरिभाषित
$\cot A$	अपरिभाषित	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$$

$$\tan(90^\circ - \theta) = \cot \theta$$

$$\cot(90^\circ - \theta) = \tan \theta$$

$$\sec(90^\circ - \theta) = \operatorname{cosec} \theta$$

$$\operatorname{cosec}(90^\circ - \theta) = \sec \theta$$

### बहुविकल्पीय प्रश्न

**निर्देश :** निम्नलिखित प्रश्नों में  $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$

1. यदि  $x = a \sin \theta$  तथा  $y = a \cos \theta$  तो  $x^2 + y^2$  का मान है .....

(a)  $a$

(b)  $a^2$

(c) 1

(d)  $\frac{1}{a}$

2.  $\operatorname{cosec} 70^\circ - \sec 20^\circ$  का मान है .....

(a) 0

(b) 1

(c)  $70^\circ$

(d)  $20^\circ$

3. यदि  $3 \sec \theta - 5 = 0$  तो  $\cot \theta =$  .....

(a)  $\frac{5}{3}$

(b)  $\frac{4}{5}$

(c)  $\frac{3}{4}$

(d)  $\frac{3}{5}$

4. यदि  $\theta = 45^\circ$  तो  $\sec \theta \cot \theta - \operatorname{cosec} \theta \tan \theta$  का मान है .....

(a) 0

(b) 1

(c)  $\sqrt{2}$

(d)  $2\sqrt{2}$

5. यदि  $\sin(\theta) = 0$  तो  $\cos \theta = 1$  तथा  $0 < \theta < 90^\circ$  है तो  $\theta = \dots$
- (a)  $90^\circ$
  - (b)  $60^\circ$
  - (c)  $30^\circ$
  - (d)  $0^\circ$
6.  $(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta) \operatorname{cosec}^2 \theta$  का मान है .....
- (a) 0
  - (b) 1
  - (c)  $\cos^2 \theta$
  - (d)  $\sin^2 \theta$
7.  $\Delta TRY$  एक समकोणीय समद्विबाहु त्रिभुज हो तो  $\cos T + \cos R + \cos Y = \dots$
- (a)  $\sqrt{2}$
  - (b)  $2\sqrt{2}$
  - (c)  $1 + \sqrt{2}$
  - (d)  $1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$
8. यदि  $\sec \theta + \tan \theta = x$ , तो  $\sec \theta = \dots$
- (a)  $\frac{x^2 + 1}{x}$
  - (b)  $\frac{x^2 + 1}{2x}$
  - (c)  $\frac{x^2 - 1}{2x}$
  - (d)  $\frac{x^2 - 1}{x}$
9.  $\cot \theta - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$  का मान है .....
- (a)  $\cot \theta \cos^2 \theta$
  - (b)  $\cot^2 \theta$
  - (c)  $\cos^2 \theta$
  - (d)  $\tan^2 \theta$
10. यदि  $\sin \theta - \cos \theta = 0$ ,  $0 \leq \theta \leq 90^\circ$  तो  $\theta$  का मान है .....
- (a)  $\cos \theta$
  - (b)  $45^\circ$
  - (c)  $90^\circ$
  - (d)  $\sin \theta$

11.  $\frac{\sin \theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}} = \dots\dots\dots$

(a)  $\cot \theta$

(b)  $\sqrt{\sin \theta}$

(c)  $\frac{\sin \theta}{\sqrt{\cos \theta}}$

(d)  $\tan \theta$

12.  $\sqrt{\frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta}} = \dots\dots\dots$

(a)  $\sec^2 \theta + \tan^2 \theta$

(b)  $\sec \theta - \tan \theta$

(c)  $\sec^2 \theta - \tan^2 \theta$

(d)  $\sec \theta + \tan \theta$

13.  $\Delta ABC$  एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज है तथा  $\angle B = 90^\circ$  है।  $2 \sin A \cos A$  का मान है.....

(a) 1

(b)  $\frac{1}{2}$

(c)  $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(d)  $\sqrt{2}$

14. यदि  $\frac{\sin^2 20^\circ + \sin^2 70^\circ}{2(\cos^2 69^\circ + \cos^2 21^\circ)} = \frac{\sec 60^\circ}{K}$  तो  $K$  का मान है.....

(a) 1

(b) 2

(c) 3

(d) 4

15. यदि  $\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{7}}$  तो  $\frac{\operatorname{cosec}^2 \theta - \sec^2 \theta}{\operatorname{cosec}^2 \theta + \sec^2 \theta} = \dots\dots\dots$

(a)  $\frac{3}{4}$

(b)  $\frac{5}{7}$

(c)  $\frac{3}{7}$

(d)  $\frac{1}{12}$

16.  $\Delta PQR$  में  $\angle Q = 90^\circ$  तथा  $\sin R = \frac{3}{5}$  हैं  $\cos P$  का मान लिखिए।
17. यदि  $A$  तथा  $B$  न्यून कोण हैं तथा  $\sin A = \cos B$  तो  $A + B$  का मान लिखिए।
18. यदि  $4 \cot \theta = 3$  तो  $\tan \theta + \cot \theta$  का मान बताइए।
19.  $\cot^2 30^\circ + \sec^2 45^\circ$  का मान बताइए।
20. यदि  $16 \cot A = 12$ ,  $\frac{\sin A + \cos A}{\sin A - \cos A}$  का मान ज्ञात कीजिए।
21. यदि  $\theta = 30^\circ$  तो  $\sin \theta + \cos^2 \theta = \underline{\hspace{2cm}}$
22. यदि  $1 - \tan^2 \theta = \frac{2}{3}$  तो  $\theta$  का मान बताइए।
23.  $\theta$  का मान ज्ञात करो यदि  $\sqrt{3} \tan 2\theta - 3 = 0$
24. यदि  $\theta$  तथा  $\phi$  पूरक कोण हैं तो  $\operatorname{cosec} \theta \sec \phi - \cot \theta \tan \phi$  का मान बताइए।
25. यदि  $\tan(3x - 15) = 1$  तो  $x$  का मान बताइए।
26.  $\theta$  का मान ज्ञात कीजिए यदि  $\sin 5\theta = \cos 4\theta$ ,  $5\theta$  और  $4\theta$  न्यून कोण हैं।

### दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

27. सरल कीजिए :

$$\tan^2 60^\circ + 4 \cos^2 45^\circ + 3 (\sec^2 30^\circ + \cos^2 90^\circ)$$

28. मान ज्ञात कीजिए :

$$2 \left( \frac{\cos 58^\circ}{\sin 32^\circ} \right) - \sqrt{3} \left( \frac{\cos 38^\circ \operatorname{cosec} 52^\circ}{\tan 15^\circ \tan 60^\circ \tan 75^\circ} \right)$$

$$\operatorname{cosec}^4 \theta - \operatorname{cosec}^2 \theta = \cot^2 \theta + \cot^4 \theta.$$

30. यदि  $\sin \theta + \sin^2 \theta = 1$  तो  $\cos^2 \theta + \cos^4 \theta$  का मान ज्ञात कीजिए।
31. यदि  $\sin 2\theta = \cos(\theta - 36^\circ)$ ,  $2\theta$  तथा  $\theta - 36^\circ$  न्यून कोण हैं तो  $\theta$  का माप ज्ञात कीजिए।
32. यदि  $\sin(3x + 2y) = 1$  तथा  $\cos(3x - 2y) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $0 \leq (3x + 2y) \leq 90^\circ$  तो  $x$  तथा  $y$  का मान ज्ञात कीजिए।
33. यदि  $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$  तो मान ज्ञात कीजिए :
- $\sin 75^\circ$
  - $\cos 15^\circ$
34. सिद्ध कीजिए :  $\frac{\cos A}{1 - \tan A} + \frac{\cos A}{1 - \cot A} = \cos A$   $A \neq 45^\circ$ .
35. सिद्ध कीजिए :  $\sqrt{\frac{\sec \theta - 1}{\sec \theta + 1}} + \sqrt{\frac{\sec \theta + 1}{\sec \theta - 1}} = 2\operatorname{cosec} \theta$
36. मान ज्ञात कीजिए :
- $$\sin^2 5^\circ + \sin^2 10^\circ + \sin^2 15^\circ + \dots + \sin^2 85^\circ$$
37. सिद्ध कीजिए :
- $$\frac{\tan \theta + \sec \theta - 1}{\tan \theta - \sec \theta + 1} = \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta}.$$
38. यदि  $2\sin(3x - 15) = \sqrt{3}$  तो  $\sin^2(2x + 10) + \tan^2(x + 5)$  का मान ज्ञात कीजिए।
39.  $\sin 60^\circ$  का मान ज्यामितीय विधि से ज्ञात कीजिए।

40. यदि  $p = \tan \theta + \sec \theta$  तो  $p + \frac{1}{p}$  का मान ज्ञात कीजिए।

41. निम्न का मान ज्ञात करो :

$$\frac{\tan \theta \cot(90^\circ - \theta) + \sec \theta \operatorname{cosec}(90^\circ - \theta) + \sin^2 35^\circ + \sin^2 55^\circ}{\tan 10^\circ \tan 20^\circ \tan 30^\circ \tan 70^\circ \tan 80^\circ}$$

42. यदि  $\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = m$  और  $\frac{\cos \alpha}{\sin \beta} = n$  सिद्ध कीजिए :  $(m^2 + n^2) \cos^2 \beta = n^2$

43. सिद्ध कीजिए  $\cos 1^\circ \cos 2^\circ \cos 3^\circ \dots \cos 180^\circ = 0$

44. सिद्ध कीजिए

$$\frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta - \cos \theta} + \frac{\sin \theta - \cos \theta}{\sin \theta + \cos \theta} = \frac{2 \sec^2 \theta}{\tan^2 \theta - 1}$$

45. यदि  $A, B$  कोण  $C$  तथा त्रिभुज  $ABC$  के अंतः कोण है तो दिखाइए कि

$$\sin\left(\frac{B+C}{2}\right) \cos\frac{A}{2} + \cos\left(\frac{B+C}{2}\right) \sin\frac{A}{2} = 1.$$

### उत्तरमाला

---

- |              |              |
|--------------|--------------|
| 1. <i>b</i>  | 2. <i>a</i>  |
| 3. <i>c</i>  | 4. <i>a</i>  |
| 5. <i>d</i>  | 6. <i>b</i>  |
| 7. <i>a</i>  | 8. <i>b</i>  |
| 9. <i>a</i>  | 10. <i>b</i> |
| 11. <i>d</i> | 12. <i>d</i> |
| 13. <i>a</i> | 14. <i>d</i> |

15. *a*      16.  $\cos P = \frac{3}{5}$

17.  $90^\circ$

18.  $\frac{25}{12}$

19. 5

20. 7

21.  $\frac{5}{4}$

22.  $30^\circ$

23.  $30^\circ$

24. 1

25.  $x = 20.$

26.  $10^\circ$

27. 9

28. 1

31.  $42^\circ$

32.  $x = 20, y = 15$

33.  $\frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$  take  $A = 45^\circ, B = 30^\circ$

36.  $\frac{17}{2}$

38.  $\frac{13}{12}$

40.  $2 \sec \theta$

41.  $2\sqrt{3}$

43.  $60^\circ$

44.  $\angle A = 67.5^\circ, \angle B = 37.5^\circ, \angle C = 75^\circ$